| 머리말 |

"어떻게 하면 수학을 잘 할 수 있나요?"

학생들로부터 가장 많이 받는 질문입니다.
수학 공부를 할 때 꼭 염두에 두어야 할 세 가지를 짚어보면서 질문에 답해 보겠습니다.

첫째, 수학은 **언어**입니다.
어느 낯선 문명의 말과 글을 듣고 볼 때 낯설고 어색하여 답답함을 느끼듯이 수학도 처음에는 어색하고 답답한 수식들의 세계처럼 느껴집니다.
이때 필요한 것은 **틀릴 것을 두려워하지 않는 용기**입니다.

수학에 등장하는 정의, 성질, 법칙들은 수학의 세계에서 통용되는 기본단어, 숙어, 관용구와도 같기 때문에 그대로 써 보고, 그대로 읽어 보고, 또 쓰고, 또 읽고, … 남에게 말 할 수 있을 때까지 해야 합니다.

둘째, 수학은 **문제풀이를 통해서 이해하는 학문**입니다.
한마디로 문제를 풀어 봐야 개념이 완벽해진다는 말입니다.
이때 필요한 것은 **인내심이며 충분한 시간**입니다.

처음에는 쉬운 문제부터 시작하기 바랍니다. 처음부터 지나치게 어려운 문제에 매달리다 보면 개념의 흐름을 놓치고 자꾸만 자괴감에 휩싸이게 됩니다. 문제를 풀고 나서 반드시 개념을 다시 읽고 써 보기 바랍니다.
즉, 확신이 생기고 자신감이 생길 때까지 해야 합니다.

셋째, 수학은 **시행착오를 거치면서 터득되는 학문**입니다.
개념에 대한 단편적인 이해를 넘어 그 적용 단계에 이르면 자신에게 숨어 있던 허점들이 나타나게 됩니다.
그 허점을 극복해 나가는 과정이 수학 실력이 느는 과정입니다.
이때 필요한 것은 **냉혹하고 집요한 반성**입니다.

반드시 자신의 풀이를 되돌아보고, 왜 틀렸는 지, 틀리지 않기 위해서는 무엇을 염두에 두어야 하는 지 꼼꼼하게 정리해 봐야 합니다. 자기가 틀린 이유를 설명할 수 있을 때까지 해야 합니다.

이 책을 통해서 수학을 접할 여러분을 그려봅니다.
공부하는 즐거움보다 점수가 주는 위압감이 더 앞서는 시대…
그러나 위의 세 가지 사항을 명심하고 나아간다면 여러분의 수학 실력은 나날이 발전해 갈 것이라고 확신합니다.
여러분 모두의 건투를 빕니다.

– 한석만 –

수학의 원리 미리보기

- 단원을 세분화하고 꼭 필요한 내용을 수록하였습니다.
- 고등학교 학생들이 반드시 알아야 할 개념들을 개정교육과정에 맞춰 사전식으로 정리하여 쉽게 이해할 수 있도록 구성하였습니다.

01 집합

우리 반에서

'키가 180 cm 이상인 학생' 이나 '혈액형이 A 형인 학생'

등은 그 대상 하나하나를 분명히 말할 수 있다. 그러나

'키가 큰 학생들의 모임'

과 같이 사람에 따라 기준이 달라 대상을 분명히 말할 수 없는 모임도 있다.

이러한 모임들 중에서 어떤 주어진 조건에 의하여 그 대상을 분명히 말할 수 있는 모임을 집합이라 하고, 집합을 이루는 대상 하나하나를 그 집합의 원소라 한다.

한편, 집합은 원소의 개수에 따라 원소가 유한개인 집합과 원소가 무수히 많은 집합으로 분류할 수 있다.

이때 원소가 유한개인 집합을 유한집합이라 하고, 원소가 무수히 많은 집합을 무한집합이라 한다.
특히, 원소가 하나도 없는 집합을 공집합이라 한다.

예를 들어, 6의 양의 약수는 1, 2, 3, 6이고, 6의 양의 배수는 6, 12, 18, …이므로 그 대상을 분명히 알 수 있다. 따라서

'6의 양의 약수의 모임' 과 '6의 양의 배수의 모임'은 집합이다.

이때

'6의 양의 약수의 모임'의 원소는 4개이므로 이 집합은 유한집합이고,
'6의 양의 배수의 모임'의 원소는 무수히 많으므로 이 집합은 무한집합이다.

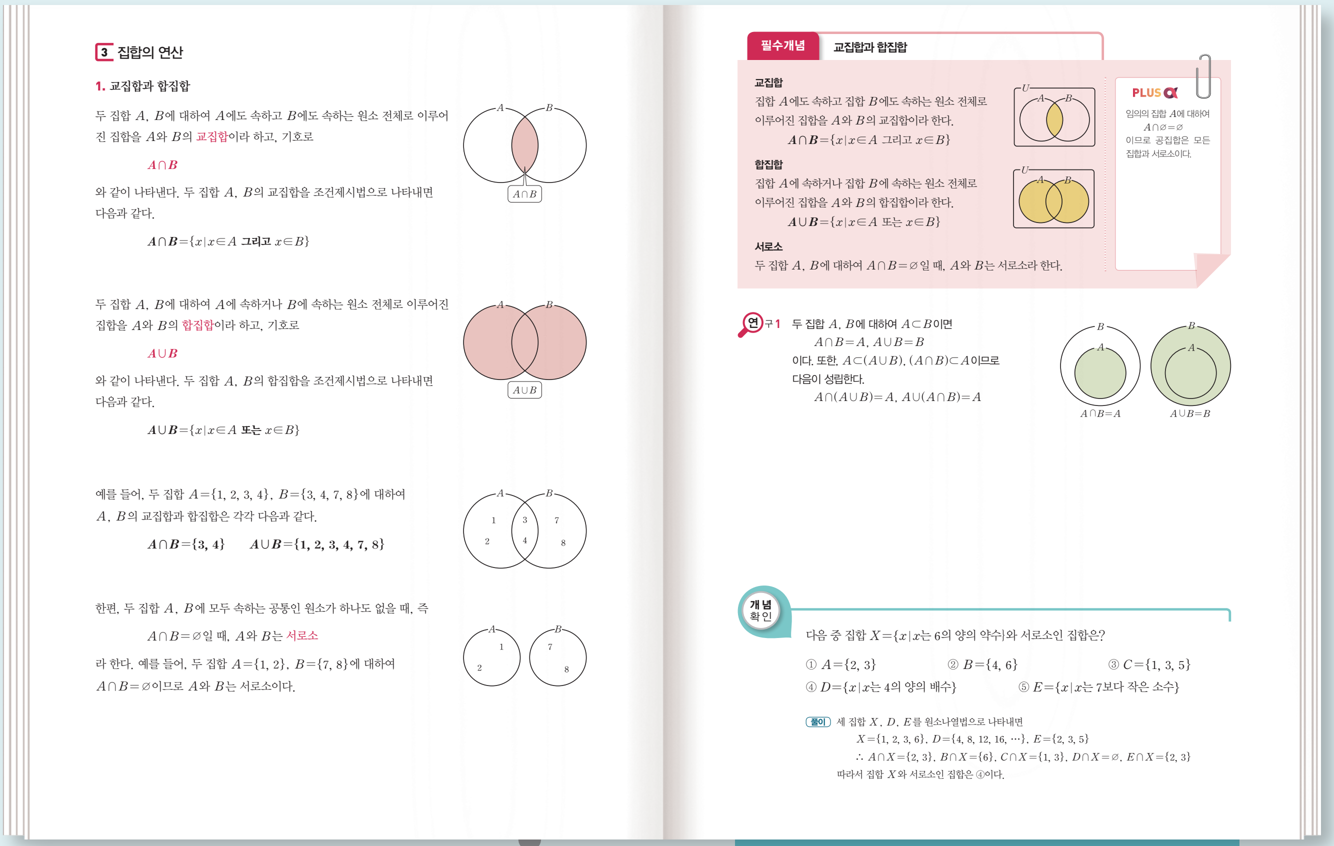
또한,

'0보다 작은 자연수의 모임'은 원소가 하나도 없으므로 공집합이다.

01

단원 들어가기

본문 내용을 학습하기에 앞서 이전에 배운 내용 또는 이 단원에서 배우는 학습 내용에 대한 기초가 되는 지식을 정리하여 개념을 더욱 쉽게 이해할 수 있도록 하였습니다.



3 집합의 연산

1. 교집합과 합집합

두 집합 A, B에 대하여 A에도 속하고 B에도 속하는 원소 전체로 이루어진 집합을 A와 B의 교집합이라 하고, 기호로

$$A\cap B$$

와 같이 나타낸다. 두 집합 A, B의 교집합을 조건제시법으로 나타내면 다음과 같다.

$$A\cap B=\{x|x\in A \text{ 그리고 } x\in B\}$$

두 집합 A, B에 대하여 A에 속하거나 B에 속하는 원소 전체로 이루어진 집합을 A와 B의 합집합이라 하고, 기호로

$$A\cup B$$

와 같이 나타낸다. 두 집합 A, B의 합집합을 조건제시법으로 나타내면 다음과 같다.

$$A\cup B=\{x|x\in A \text{ 또는 } x\in B\}$$

예를 들어, 두 집합 $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{3, 4, 7, 8\}$에 대하여 A, B의 교집합과 합집합은 각각 다음과 같다.

$$A\cap B=\{3, 4\} \qquad A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 7, 8\}$$

한편, 두 집합 A, B에 모두 속하는 공통인 원소가 하나도 없을 때, 즉

$A\cap B=\varnothing$일 때, A와 B는 서로소

라 한다. 예를 들어, 두 집합 $A=\{1, 2\}$, $B=\{7, 8\}$에 대하여 $A\cap B=\varnothing$이므로 A와 B는 서로소이다.

필수개념 교집합과 합집합

교집합
집합 A에도 속하고 집합 B에도 속하는 원소 전체로 이루어진 집합을 A와 B의 교집합이라 한다.
$$A\cap B=\{x|x\in A \text{ 그리고 } x\in B\}$$

합집합
집합 A에 속하거나 집합 B에 속하는 원소 전체로 이루어진 집합을 A와 B의 합집합이라 한다.
$$A\cup B=\{x|x\in A \text{ 또는 } x\in B\}$$

서로소
두 집합 A, B에 대하여 $A\cap B=\varnothing$일 때, A와 B는 서로소라 한다.

PLUS α
임의의 집합 A에 대하여
$A\cap\varnothing=\varnothing$
이므로 공집합은 모든 집합과 서로소이다.

연구 1 두 집합 A, B에 대하여 $A\subset B$이면
$A\cap B=A$, $A\cup B=B$
이다. 또한, $A\subset(A\cup B)$, $(A\cap B)\subset A$이므로 다음이 성립한다.
$A\cap(A\cup B)=A$, $A\cup(A\cap B)=A$

$A\cap B=A$ $A\cup B=B$

개념 확인

다음 중 집합 $X=\{x|x\text{는 6의 양의 약수}\}$와 서로소인 집합은?

① $A=\{2, 3\}$ ② $B=\{4, 6\}$ ③ $C=\{1, 3, 5\}$
④ $D=\{x|x\text{는 4의 양의 배수}\}$ ⑤ $E=\{x|x\text{는 7보다 작은 소수}\}$

풀이 세 집합 X, D, E를 원소나열법으로 나타내면
$X=\{1, 2, 3, 6\}$, $D=\{4, 8, 12, 16, \cdots\}$, $E=\{2, 3, 5\}$
$\therefore A\cap X=\{2, 3\}$, $B\cap X=\{6\}$, $C\cap X=\{1, 3\}$, $D\cap X=\varnothing$, $E\cap X=\{2, 3\}$
따라서 집합 X와 서로소인 집합은 ④이다.

개념 정리

개념에 대한 설명 및 공식, 성질 등을 실례를 들어 구체적으로 자세히 설명하여 쉽고 정확하게 이해할 수 있도록 하였습니다.
또한, 개념 설명과 필수개념이 마주보고 있어 효과적으로 학습할 수 있도록 하였습니다.

필수개념 개념을 한눈에 확인할 수 있도록 정리

PLUS α 개념 이해에 도움이 되는 용어 및 간단한 공식 정리

연구 학습 내용 중 확장, 심화, 통합할 수 있는 내용을 정리

개념 확인 학습한 내용을 바로 확인할 수 있는 문제

필수문제 | 3 **집합의 연산** ▶Link P. 19, 21 필수개념

전체집합 $U=\{x\,|\,x$는 10 이하의 자연수$\}$의 두 부분집합 A, B에 대하여

$$A-B=\{3,\ 5,\ 9\},\ B-A=\{4,\ 10\},\ (A\cup B)^C=\{2,\ 6,\ 8\}$$

일 때, $A\cap B$의 모든 원소의 합을 구하여라.

풀이 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 10\}$, $(A\cup B)^C=\{2,\ 6,\ 8\}$이므로

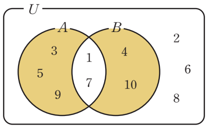
$A\cup B=\{1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7,\ 9,\ 10\}$

$A-B=\{3,\ 5,\ 9\}$, $B-A=\{4,\ 10\}$이므로

$A\cap B=\{1,\ 7\}$

따라서 $A\cap B$의 모든 원소의 합은

$1+7=8$



답 8

필수 문제

실전에 자주 출제되는 문제들을 엄선하여 해결 과정을 제시함으로써
해당 유형에 대한 이해를 확실히 할 수 있도록 하였습니다.

노트 필기

꼭 알아야 할 개념들을 되짚어 주어 실전에 활용할 수 있도록 하였습니다.

노트 필기

전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여

(i) $A\cap B$ ➔ A에도 속하고 B에도 속하는 원소들의 집합

(ii) $A\cup B$ ➔ A에 속하거나 B에 속하는 원소들의 집합

(iii) A^C ➔ U에 속하고 A에 속하지 않는 원소들의 집합

(iv) $A-B$ ➔ A에 속하고 B에 속하지 않는 원소들의 집합

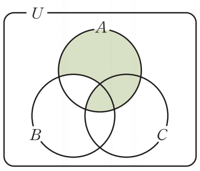
유제

필수문제와 유사한 문제로
유형에 대해 반복 학습을 할
수 있도록 제시하였습니다.

정답 및 해설 P 2

유제 3-1

오른쪽 그림은 전체집합 U의 서로 다른 세 부분집합 A, B, C 사이의 관계를 벤다이어그램으로 나타낸 것이다. 다음 중 색칠한 부분을 나타내는 집합과 같은 것은? (단, $A\cap B\cap C\neq\varnothing$)



① $(A\cup B)-C$ ② $A-(B-C)$

③ $(A\cup C)-B$ ④ $A-(B\cup C)$

⑤ $A-(B\cap C)$

연 습 문 제

실력 완성

06 집합 $X=\{-1, 0, 1\}$에 대하여 두 집합 A, B를

$$A=\{x+y \mid x\in X, y\in X\},\ B=\{xy \mid x\in X, y\in X\}$$

라 할 때, 다음 중 옳은 것은?

① $A\subset B=X$　② $A=X\subset B$　③ $B\subset A\subset X$
④ $B\subset X=A$　⑤ $X=B\subset A$

07 두 집합 $A=\{a, b, c, d\}$, $B=\{a+1, b+1, c+1, d+1\}$에 대하여 다음이 성립한다.

(가) $A\cap B=\{3, 4\}$	(나) $A\cup B=\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

집합 A의 원소 중 가장 큰 값을 M, 가장 작은 값을 m이라 할 때, $M-m$의 값은?

① 2　② 3　③ 4　④ 5　⑤ 6

연습 문제

중단원별로 학습한 내용을 난이도별(개념, 실력, 심화)로 구성하여 연산 능력 및 통합적 사고력을 향상시킬 수 있도록 하였습니다.

특강

교과서에는 자세히 다루지는 않지만 실전에 꼭 필요한 개념들을 별도로 모아 학생들의 실력을 한 단계 더 업그레이드 할 수 있도록 하였습니다.

Topic

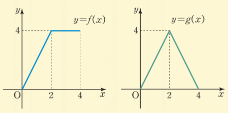
특강에서 학습한 개념을 요약 정리하였고 문제를 통해 이해를 극대화할 수 있도록 하였습니다.

특강　PRINCIPLES OF MATH

합성함수의 그래프

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 합성함수 $y=(g\circ f)(x)$의 그래프는 $f(x)$의 치역을 $g(x)$의 정의역으로 하여 $g(f(x))$의 함수식을 구한 후 그 그래프를 그린다.

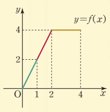
$0\le x\le 4$에서 정의된 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 합성함수 $y=(g\circ f)(x)$의 그래프를 좌표평면에 나타내어 보자.



함수 $y=g(x)$의 그래프에서 $g(x)=\begin{cases}2x & (0\le x\le 2)\\ -2x+8 & (2\le x\le 4)\end{cases}$이므로

$$g(f(x))=\begin{cases}2f(x) & (0\le f(x)\le 2)\\ -2f(x)+8 & (2\le f(x)\le 4)\end{cases}$$

함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $f(x)=\begin{cases}2x & (0\le x\le 1)\\ 2x & (1\le x\le 2)\\ 4 & (2\le x\le 4)\end{cases}$이므로



$$g(f(x))=\begin{cases}2(2x) & (0\le x\le 1)\\ -2(2x)+8 & (1\le x\le 2)\\ -2\times 4+8 & (2\le x\le 4)\end{cases}$$

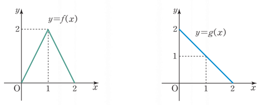
Topic 2 합성함수의 그래프　정답 및 해설 P 43

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 합성함수 $y=(g\circ f)(x)$의 그래프는 다음과 같은 순서로 그린다.

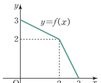
① 함수 $g(x)$의 식을 구하여 $g(f(x))$를 $f(x)$에 대한 식으로 나타낸다.
② 함수 $g(f(x))$를 x에 대한 식으로 나타낸 후, $y=g(f(x))$의 그래프를 그린다.

특히, 꺾인 형태의 그래프는 꺾인 점을 기준으로 정의역의 범위를 나누어 함수의 식을 생각한다.

Topic 2-1 집합 $X=\{x \mid 0\le x\le 2\}$에서 X로의 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 합성함수 $y=g(f(x))$의 그래프를 좌표평면에 나타내어라.



Topic 2-2 함수 $y=f(x)$ $(0\le x\le 3)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 합성함수 $y=(f\circ f)(x)$의 그래프를 좌표평면에 나타내어라.



이 책의 차례

Ⅲ 경우의 수

부 록

특강

Ⅰ 집합과 명제

01 집합

우리 반에서

‘키가 180 cm 이상인 학생’ 이나 ‘혈액형이 A형인 학생’

등은 그 대상 하나하나를 분명히 말할 수 있다. 그러나

‘키가 큰 학생들의 모임’

과 같이 사람에 따라 기준이 달라 대상을 분명히 말할 수 없는 모임도 있다.

이러한 모임들 중에서 어떤 주어진 조건에 의하여 그 대상을 분명히 말할 수 있는 모임을 집합이라 하고, 집합을 이루는 대상 하나하나를 그 집합의 원소라 한다.

한편, 집합은 원소의 개수에 따라 원소가 유한개인 집합과 원소가 무수히 많은 집합으로 분류할 수 있다.

이때 원소가 유한개인 집합을 유한집합이라 하고, 원소가 무수히 많은 집합을 무한집합이라 한다.
특히, 원소가 하나도 없는 집합을 공집합이라 한다.

예를 들어, 6의 양의 약수는 1, 2, 3, 6이고, 6의 양의 배수는 6, 12, 18, …이므로 그 대상을 분명히 알 수 있다. 따라서

‘6의 양의 약수의 모임’ 과 ‘6의 양의 배수의 모임’은 집합이다.

이때

‘6의 양의 약수의 모임’의 원소는 4개이므로 이 집합은 유한집합이고,
‘6의 양의 배수의 모임’의 원소는 무수히 많으므로 이 집합은 무한집합이다.

또한,

‘0보다 작은 자연수의 모임’은 원소가 하나도 없으므로 공집합이다.

1 집합의 뜻과 표현

어떤 기준에 의하여 그 대상을 분명히 알 수 있는 것들의 모임을 **집합**이라 하고, 집합을 이루는 대상 하나하나를 그 집합의 **원소**라 한다.

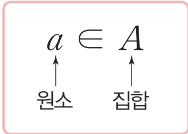
a가 집합 A의 원소일 때, a는 집합 A에 속한다고 하며 기호로

$$\boldsymbol{a \in A}$$

와 같이 나타낸다. 또한, b가 집합 A의 원소가 아닐 때, b는 집합 A에 속하지 않는다고 하며 기호로

$$\boldsymbol{b \notin A}$$

와 같이 나타낸다.



한편, 원소가 유한개인 집합 A의 원소의 개수를 기호로

$$\boldsymbol{n(A)}$$

과 같이 나타낸다. 특히, 원소가 하나도 없는 집합을 **공집합**이라 하고, 기호로

$$\boldsymbol{\varnothing}$$

으로 나타낸다.

집합은 기호 { }를 사용하여 표현한다. 예를 들어, 8의 양의 약수의 집합을 A라 하면 집합 A에 속하는 모든 원소를 { } 안에 나열하여

$$A=\{1, 2, 4, 8\}$$

과 같이 나타내거나 집합 A에 속하는 각 원소들이 가지는 공통된 성질을 제시하여

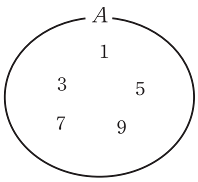
$$A=\{x \mid x\text{는 8의 양의 약수}\}$$

와 같이 나타낸다.

또한, 집합을 나타낼 때 그림을 이용하여 나타내기도 한다. 예를 들어, 집합

$$A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$$

를 오른쪽 그림과 같이 나타낼 수 있다. 이와 같은 그림을 **벤다이어그램**이라 한다.



필수개념 집합의 뜻과 표현

집합과 원소

(1) 그 대상을 분명히 알 수 있는 것들의 모임을 집합이라 하고,
집합을 이루는 대상 하나하나를 원소라 한다.

$a \in A$ ➔ a는 집합 A의 원소이다.

$b \notin A$ ➔ b는 집합 A의 원소가 아니다.

(2) 원소가 유한개인 집합 A의 원소의 개수를 $n(A)$와 같이 나타내고,
특히, 원소가 하나도 없는 집합을 공집합($\varnothing$)이라 한다.

집합의 표현

(1) 원소나열법 : 집합에 속하는 모든 원소들을 { } 안에 나열하는 방법

(2) 조건제시법 : 집합에 속하는 각 원소들의 공통된 성질을 제시하는 방법
➔ $\{x \mid x$에 대한 조건$\}$

(3) 벤다이어그램 : 집합과 원소를 간단한 그림으로 나타낸 것

PLUS α

집합은 알파벳 대문자 A, B, C, $\cdots$로 나타내고 원소는 알파벳 소문자 a, b, c, $\cdots$로 나타낸다.

연구 1 원소가 유한개인 집합을 유한집합이라 하고, 원소가 무수히 많은 집합을 무한집합이라 한다.
공집합은 원소의 개수가 0이므로 유한집합으로 생각한다. ➔ $n(\varnothing)=0$

연구 2 집합 $\{1, 3, 5\}$는 원소의 나열 순서를 바꾸어 $\{3, 1, 5\}$로 나타낼 수 있다.
그러나 $\{1, 3, 3, 5\}$와 같이 원소를 중복하여 나타내지는 않는다.

연구 3 집합의 원소가 많고, 집합 사이에 일정한 규칙이 있을 때, 원소 중 일부를 생략하고 '$\cdots$'을 사용하여 나타낸다. 예를 들어, 1부터 100까지의 자연수의 집합은 $\{1, 2, 3, \cdots, 100\}$과 같이 나타낼 수 있다.

개념 확인

다음 모임 중 집합인 것은?

① 착한 학생들의 모임
② 수학을 잘하는 학생들의 모임
③ 귀여운 동물들의 모임
④ 10에 가까운 자연수의 모임
⑤ 5의 양의 배수의 모임

풀이 '착한', '잘하는', '귀여운', '가까운'은 그 대상이 명확하지 않으므로
①, ②, ③, ④는 집합이라고 할 수 없다.
그러나 5의 양의 배수의 모임은 그 대상이 명확하므로 ⑤는 집합이다.

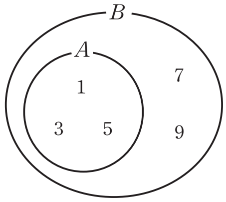
2 집합 사이의 포함 관계

1. 부분집합의 뜻

두 집합 $A=\{1, 3, 5\}$, $B=\{1, 3, 5, 7, 9\}$에 대하여 집합 A의 모든 원소는 집합 B에 속한다. 이와 같이

집합 A의 모든 원소가 집합 B에 속할 때,

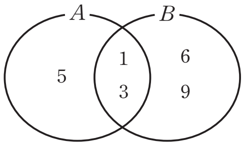
집합 A를 집합 B의 부분집합이라 하고, 기호로



$A\subset B$

$$\boldsymbol{A\subset B}$$

와 같이 나타낸다. 한편, 집합 A의 원소 중에서 집합 B에 속하지 않는 원소가 있을 때, 즉 집합 A가 집합 B의 부분집합이 아닐 때, 기호로

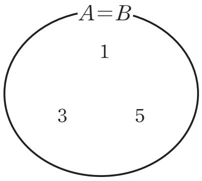


$$\boldsymbol{A\not\subset B}$$

와 같이 나타낸다.

두 집합 A, B에 대하여 '$\boldsymbol{A\subset B}$**이고** $\boldsymbol{B\subset A}$'이면 집합 A의 모든 원소는 집합 B에 속하고, 집합 B의 모든 원소도 집합 A에 속하므로 두 집합 A, B는 서로 같은 원소로 이루어져 있다.

이와 같이 두 집합 A, B의 원소가 모두 같을 때 '$\boldsymbol{A}$**와** $\boldsymbol{B}$**는 서로 같다**'고 하고, 기호로



$$\boldsymbol{A=B}$$

와 같이 나타낸다. 한편, 두 집합 A, B가 서로 같지 않을 때, 기호로

$$\boldsymbol{A\neq B}$$

와 같이 나타낸다.

또한, 두 집합 A, B에 대하여 집합 A가 집합 B의 부분집합이고, 두 집합 A, B가 서로 같지 않을 때, 즉

$$A\subset B\text{이고 } A\neq B$$

일 때, 집합 A를 집합 B의 진부분집합이라 한다.

필수개념 **집합 사이의 포함 관계**

부분집합

집합 A의 모든 원소가 집합 B에 속할 때,
집합 A를 집합 B의 부분집합이라 한다. ➔ $A\subset B$

서로 같은 집합

두 집합 A, B에 대하여 $A\subset B$이고 $B\subset A$일 때,
두 집합 A, B는 서로 같다고 한다. ➔ $A=B$

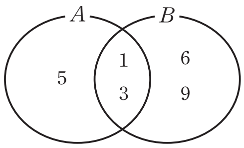
진부분집합

두 집합 A, B에 대하여 $A\subset B$이고 $A\neq B$일 때,
집합 A를 집합 B의 진부분집합이라 한다.

PLUS α

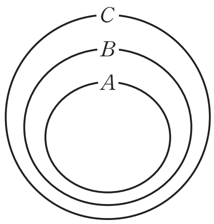
어떤 집합에 대하여 자기 자신이 아닌 부분집합을 그 집합의 진부분집합이라 한다.

연구 1 집합 A의 원소 중에서 집합 B에 속하지 않는 것이 있으면 집합 A는 집합 B의 부분집합이 아니다.
예를 들어, 두 집합 $A=\{1, 3, 5\}$, $B=\{1, 3, 6, 9\}$에 대하여
$5\in A$이지만 $5\notin B$이므로 $A\not\subset B$이다.



연구 2 (1) $A\subset B$는 A가 B의 진부분집합이거나 $A=B$임을 뜻한다.
(2) 공집합($\varnothing$)의 부분집합은 공집합($\varnothing$)뿐이다.

연구 3 임의의 세 집합 A, B, C에 대하여
(1) 공집합은 모든 집합의 부분집합이다. ➔ $\varnothing\subset A$
(2) 모든 집합은 자기 자신의 부분집합이다. ➔ $A\subset A$
(3) $A\subset B$, $B\subset C$이면 $A\subset C$이다.



개념 확인

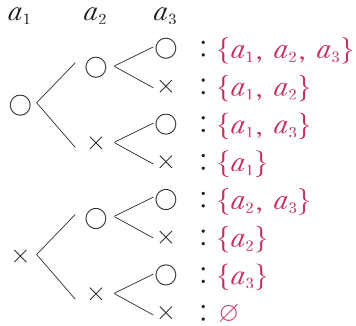
집합 $A=\{1, 3, 5\}$의 부분집합과 진부분집합을 모두 구하여라.

풀이 부분집합 : $\varnothing$, $\{1\}$, $\{3\}$, $\{5\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 5\}$, $\{3, 5\}$, $\{1, 3, 5\}$
진부분집합 : $\varnothing$, $\{1\}$, $\{3\}$, $\{5\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 5\}$, $\{3, 5\}$

2. 부분집합의 개수

집합 $A=\{a_1, a_2, a_3\}$의 부분집합의 개수는 부분집합에 속하는 원소를 결정하는 방법의 수와 같다.

집합 A의 원소 a_1, a_2, a_3은 집합 A의 부분집합에 속하거나 속하지 않는다. 이때 부분집합에 속하는 경우를 ○, 속하지 않는 경우를 ×라 하면 오른쪽 그림과 같이 a_1이 속하거나 속하지 않는 2가지 각각의 경우에 대하여 a_2가 속하거나 속하지 않는 2가지 경우가 있다. 또, 그 각각에 대하여 a_3이 속하거나 속하지 않는 2가지 경우가 있다.



따라서 원소가 3개인 집합 A의 부분집합의 개수는

$$2\times2\times2=2^3=8$$

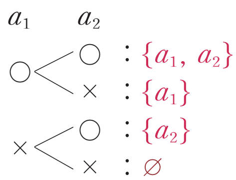
이다. 이와 같은 방법으로 원소가 n개인 집합 A의 부분집합의 개수는 다음과 같다.

$$\underbrace{2\times2\times2\times\cdots\times2}_{n\text{개}}=2^n$$

특정한 원소를 포함하지 않거나 포함하는 부분집합의 개수도 위의 원리를 이용하여 구할 수 있다.

집합 $A=\{a_1, a_2, a_3\}$의 부분집합 중에서 원소 a_3을 포함하지 않는 부분집합은 원소 a_3을 제외한 집합 $\{a_1, a_2\}$의 부분집합과 같으므로 그 개수는 다음과 같다.

$$2\times2=2^2=4$$



또한, 집합 $A=\{a_1, a_2, a_3\}$의 부분집합 중에서 원소 a_3을 반드시 포함하는 부분집합은 a_3을 포함하지 않는 부분집합 각각에 원소 a_3을 포함시키면 되므로 그 개수는 a_3을 원소로 가지지 않는 부분집합의 개수와 같다.

$\varnothing \to \{a_3\}$

$\{a_1\} \to \{a_1, a_3\}$

$\{a_2\} \to \{a_2, a_3\}$

$\{a_1, a_2\} \to \{a_1, a_2, a_3\}$

따라서 집합 $A=\{a_1, a_2, a_3\}$의 부분집합 중에서 원소 a_3을 반드시 포함하는 부분집합은 4개이다.